

2-1-Gyorsuló mozgások egyenes mentén

.1) Mennyi idő alatt és mekkora gyorsulással tesz meg a kerékpáros 60 m-t, álló helyzetből indulva és egyenletesen gyorsulva, ha 6 m/s-os sebességet ér el? **(20 s; 0,3 m/s²)**

Középsebességes elmozdulás-képlet, majd a gyorsulás definíciója.

.2) Gépkocsi 90 km/h sebességről 8 m/s² lassulással fékez. Mennyi idő alatt és mekkora fékúton áll meg? **(3,125 s; 39,06 m)**

A gyorsulás definíciója, majd valamelyik útképlet.

.3) Mekkora úton gyorsul a jármű 54 km/h-ról 72 km/h-ra, ha gyorsulása 2, 5 m/s²? **(35 m)**

A gyorsulás definíciója, majd valamelyik útképlet.

.4) Gépkocsi fékútja 72 km/h sebesség esetén 50 m. Mekkora a lassulás? **(-4 m/s²)**

Középsebességes elmozdulás-képlet, majd a gyorsulás definíciója; avagy: ...

Ha a mozgást időben megfordítva tekintjük, egyszerű egyenletrendszer adódik a gyorsulásra és az időre.

.5) Elkerülhető-e az összeütközés, ha egy 54 km/h sebességű jármű előtt 95 m távolságban forgalmi akadály bukkan fel, és a jármű 1,25 m/s² lassulással fékezhető? Az akadály észlelése és a fékezés megkezdése között a vezető reakcióideje 1 s. **(nem)**

A megállásig megtett utat kell összehasonlítani a 95 m-rel (avagy a 95 méteres távolságban meglévő sebességet a 0 m/s sebességgel). 105 m fékút adódik.

.6) Egyenes vonalú pályán állandó gyorsulással mozgó test sebessége 216 m út megtétele után a kezdeti érték ötszörösére nőtt, miközben 120 s idő telt el. Mekkora volt a kezdősebesség és a gyorsulás? **(0,6 m/s; 0,02 m/s²)**

Középsebességes elmozdulás-képletből adódik a kezdősebesség.

.7) Egy focista 11-est rúg, a labda végig a fűvön halad. Mekkora sebességgel kell elrúgnia a labdát az egyik sarok felé, hogy a kapus ne érhesse el? A kapu 7, 3 m széles, a kapus reakciójához és a vetődéshez szükséges idő 0,5 s, a közegellenállást úgy vesszük figyelembe, hogy a labda egyenletesen lassulva, sebességének 5 %-át veszíti el a kapuig. **(85,6 km/h)**

Az átlagsebesség a kezdősebesség 97,5%-a. Ezzel teszi meg a labda a sarokig tartó utat, legfeljebb 0,5 s alatt.

.8) Egy álló vonat először 4 percig gyorsult, a megszerzett sebességével 40 percig egyenletesen haladt, majd 2 perc alatt egyenletesen lassulva megállt. A 46 perc alatt 51,6 km utat tett meg. Rajzoljuk meg a v-t grafikont! Mekkora volt sebessége az egyenletes haladáskor? Mekkoraak voltak gyorsulásai? **(20 m/s; 0,083 m/s²; -0,167 m/s²)**

A v-t grafikon alatti terület trapéz, melynek területe a megtett út. A trapéz alapjai ismertek, magassága számolható.

.9) Egy gépkocsi egyenletesen, 40 km/h sebességgel halad el egy álló másik kocs mellett. Amikor 100 m-re jut tőle, a másik kocs 1,2 m/s² gyorsulással elindul.

○ Mikor és mekkora úton éri el a második kocs az elsőt? **(25,15 s, 379,4 m)**

○ Mekkora a mozgás során közöttük fellépő legnagyobb távolság, és ez mikor lép fel? **(151,4 m; 9,26 s)**

○ A talajhoz rögzített koordináta rendszerben, melynek origója az álló kocs helyén van, a helykoordináták: $s_1 = d + v_0 t$ illetve $s_2 = 1/2 a t^2$. Ezek egyenlők lesznek a találkozáskor. A másodfokú egyenlet teljes négyzetté való kiegészítéssel oldható meg.

○ A távolság mindaddig nő közöttük, amíg a hátsó autó sebessége el nem éri az elől haladóét.

.10) Nem nulla kezdősebességű egyenletesen változó mozgás esetén milyen képlet adja meg a sebességnek az elmozdulástól való függését? $\left(s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}\right)$

A hely-idő képletben szereplő t idő helyére írjuk be a sebességeképletből kifejezett t időt.

.11) Egyenletesen lassuló mozgású test sebessége s úton harmadára csökken. Mekkora a megállásig még megtett út? ($s/8$)

Ötlet1: Alkalmazzuk a mozgás mindkét szakaszára az előző feladat eredményét, avagy annak gondolatmenetét, majd osszuk el őket egymással.

Ötlet2: Vegyük filmre a mozgást a test megállásáig, majd a filmet forgassuk le fordítva! Ekkor egy kezdősebesség nélküli gyorsuló mozgást látunk.

Ekkor $s \sim t^2$, de $t \sim v$, így $s \sim v^2$. Emiatt harmadakkora végsebességhez kilenced akkora út tartozik, tehát az utak aránya a két szakaszon 1: (9-1) = 1:8.

.12) Fába 500 m/s sebességgel belelőtt puskagolyó 3 cm mélyen hatolt a fába. Ugyanezzel a puskával 1 cm, vastag, ugyanilyen anyagú deszkát lövünk át. Mekkora sebességgel távozik a lövedék, és mennyi időt töltött a deszkában? (**408 m/s; $2,20 \cdot 10^{-6}$ s**)

Ötlet1:

Az a kérdés, hogy az eredeti mozgás útjának első harmadát mekkora sebességgel fejezi be, azaz a visszafelé lejátszott mozifilmen mekkora sebességet ér el az út kétharmadán, ha a végére 500 m/s-ot.

Mivel $s \sim (t^2) \sim v^2$, a 2/3-nyi úthoz 2/3-adnyi v^2 , azaz $v = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 500 \frac{m}{s} = 408 \frac{m}{s}$ sebesség tartozik.

Az időt az átlagsebességgel számíthatjuk az útból.

Ötlet2:

Írjuk fel az $s = (v^2 - v_0^2)/(2a)$ képletet a teljes mozgásra, és a deszkában töltött szakaszokra is.

Vegyük ezek hányadosát, és felhasználva s_1 és s_2 ismert értékeit.

Az időt az átlagsebességgel számíthatjuk az útból.

.13) Egyenes pályán állandó gyorsulással mozgó test 10 m hosszú pályaszakaszt 1,06 s alatt, az ezt követő 10 m hosszú pályaszakaszt 2,2 s alatt futja be. Mekkora a gyorsulása? (**-3,00 m/s²**)

A v_0 kezdősebesség és az a gyorsulás segítségével mindkét szakasz elején és végén felírható az aktuális sebesség. A középsebesség elmozdulás-képletet felírva mindkét szakaszra, egyenletrendszer adódik a -ra és v_0 -ra.

.14) Egy repülőgép egyenletesen gyorsulva a felszállópálya feléig, a felszálláshoz szükséges sebesség 80 %-át éri el. A pálya hányad részénél éri el a felszállási sebességet? (**25/32=78,1%**)

Az indulástól számított út a végén kialakult sebesség négyzetével arányos.

A sebesség 0,8 v -ról v -re nő, így az indulástól számított utak aránya 0,8²:1².

.15) A 63 km/h sebességű személyautó akkor kezd fékezni, amikor az előtte 36 km/h sebességű teherautót már d távolságra megközelítette. Legalább mekkorának kell lenni a d távolságnak, hogy ne ütközzenek össze? A személykocsi gyorsulása -1,5 m/s². (**18,75 m**)

Ötlet1:

A fékezést megkezdésének helyétől mérve a helykoordinátákat, mindkét kocsi hely-idő függvénye könnyen felírható, különbségük a köztük lévő távolság időfüggését adja.

Ez egy pozitív főegyütthatós másodfokú kifejezés, melynek minimuma (a mozgás során kialakult legkisebb távolság) teljes négyzetté alakítással kapható meg. Ez a minimum d -18,5m lesz. Ennek kell pozitívnak maradnia.

Ötlet2:

A hátsó autó mindaddig közeledik az elsőhöz, amíg sebessége nagyobb az elől haladóénál. Ha sebessége már kisebb lesz, akkor távolodni fognak egymástól.

Nem lesz ütközés, ha addig a pillanatig nem éri utol, amely pillanatban a sebessége megegyezik az elől haladóéval.

Ez 5 s múlva lesz. Eddig megtett útjaik segítségével adható meg a kezdetben szükséges d távolság.

Ötlet3:

Az elől haladó autó utasa hátranézve azt látja, hogy....

..... kezdetben tőle d távolságban van egy autó, amely közeledik $7,5 \text{ m/s}$ sebességgel és $-1,5 \text{ m/s}^2$ gyorsulással fékez, de megállás után ugyanezen gyorsulással kezd távolodni, amíg sebessége 10 m/s nem lesz. Addig nem szabad ütköznie, amíg meg nem fordul.

.16) Egymás után, azonos v_0 sebességgel, egymástól d követési távolságot tartva, halad két autó, melyek fékezési lassulásának a nagysága is azonos (a pozitív).

Az elől haladó hirtelen fékezni kezd. A hátsó ezt érzékelve, szintén fékez, de a fékezést a t_0 reakcióideje miatt csak később kezdi meg. (Adatok: Száraz úton jól tapadó gumival $a=7,5 \text{ m/s}^2$ körüli, vizes úton ennek fele.

A t_0 reakcióidő hossza (az akadály észlelése, döntés, reagálás, fékberendezés működésbe lépése) egyénenként és autónként más és más, de 0,5 s és 2 s közötti érték általában.

Egy autó hossza 4-5 m körüli.)

- Rajzoljuk meg a két autó sebesség-idő diagramját közös koordináta rendszerben.
- Milyen összefüggésnek kell lennie a fent említett mennyiségeknek, hogy ne ütközzenek össze? ($d > v_0 t_0$)
- *Kaptam egy jótanácsot egy jó barátomtól: „Mindig tarts annyi kocsihossznyi követési távolságot, amennyi a km/h-ban mért sebességed 10-ed része.” Megfogadjam-e ezt a tanácsot? (**Igen, ha nem vagyok az átlagosnál nagyobb reakcióidejű.**)

Vizsgáljuk az autók relatív mozgását, az elől haladó autó hátranéző utasának szemszögéből!

A fékezés kezdetéig a hátul haladó autó állni látszik. Az első autó fékezésének kezdetétől t_0 időtartamon át a hátsó autó d távolságról indulva, közeledni látszik, a gyorsulással. Ezalatt a távolságuk csökken, $1/2 a t_0^2$ -tel.

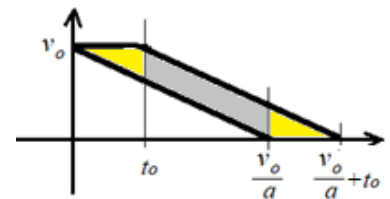
A második szakaszban, amikor mindketten fékeznek ($t_0 < t < v_0/a$), egymáshoz képest nem gyorsulnak, így relatív sebességük állandó, mégpedig az első szakaszban megszerzett at_0 . Emiatt a távolságcsökkenés a 2. szakaszban $at_0 \cdot (v_0/a - t_0)$.

A harmadik szakaszban az első autó már áll, hozzá képest a második autó at_0 sebességről, t_0 idő alatt állóra lassul a lassulással. Ekkor a távolságcsökkenés $(at_0 + 0)/2 \cdot t_0$.

A teljes távolságcsökkenés összesen $v_0 t_0$ lesz, függetlenül a gyorsulás nagyságától!

Hát persze! A kettőjük útjának különbsége, amivel a kezdeti távolság csökken, a két grafikon által közrezárt *paralelogramma* területe $v_0 t_0$ (magasság v_0 , alap t_0).

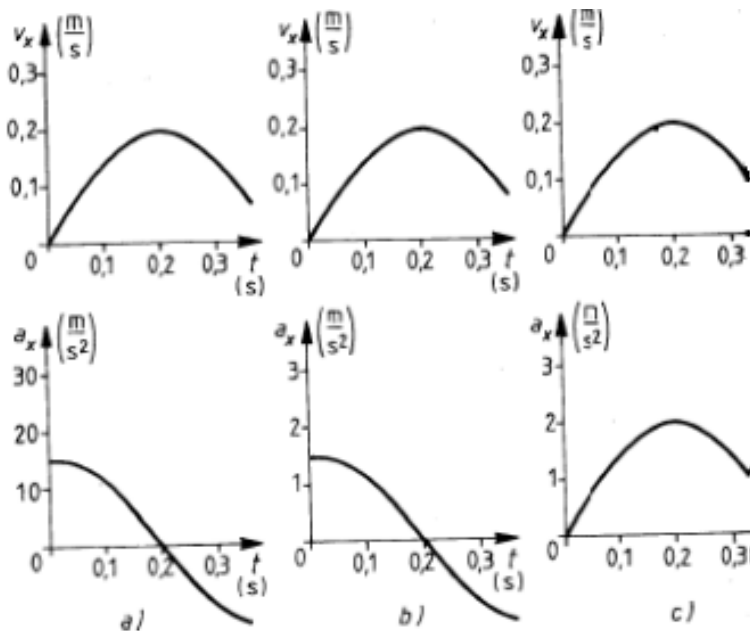
Legalább ekkorának kellett lennie az eredeti követési távolságnak.



Ha V jelöli a sebességet km/h-ban, akkor a szükséges követési távolság a fentiek szerint: $d = V/3,6 \cdot t_0$, méter, míg a barátom tanácsa szerint $D = V/10 \cdot 4,5$ méter (átlagos autóhosszal számolva).

$D/d = 1,62 \text{ secundum}/t_0$. Ha tehát az átlagosnál nem nagyobb a reakcióidő, akkor érdemes a barátom tanácsát megfogadni, mert az legalább akkora mint ami szükséges.

.17) Az ábrán egymás alatt három grafikonpárt látsz, melyek közül azonban csak egy pár helyes. Melyik miért nem helyes? (2. jó)



Az azonos sebességgrafikonok adott pontbeli érintőinek meredekségei az adott pontbeli gyorsulást adják. 0,2 s-nál a sebesség maximális, itt az érintő meredeksége 0. 0-0,1 s közötti intervallumban a sebesség lineárishoz hasonló. Ennek meredeksége becsülhető.

.18) Egy mozgás olyan, hogy a test útját az $s = 5\text{m/s}^3 \cdot t^3$ képlet adja meg.

a) Mekkora utat tett meg 3 s alatt? **(135 m)**

b) Mekkora a test sebessége és gyorsulása $t = 3\text{s}$ -kor? **(90 m/s²; 135 m)**

a) $s(3\text{s}) = \dots$

b) A t_0 kis környezetében számított átlagsebesség $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{5\frac{\text{m}}{\text{s}^3}(t^3 - t_0^3)}{t - t_0} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}^3}(t^2 + tt_0 + t_0^2)$. Ennek t_0 -beli határértéke adja a t_0 -beli pillanatnyi sebességet: $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} 5\frac{\text{m}}{\text{s}^3}(t^2 + tt_0 + t_0^2) = 15\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t_0^2$. Tehát a sebességképlet: $v(t) = 15\text{m/s}^3 \cdot t^2$.

c) Hasonlóan, a t_0 -beli pillanatnyi gyorsulás az átlagsebesség határértéke t_0 -ban, azaz:

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{15\frac{\text{m}}{\text{s}^3}(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} 15\frac{\text{m}}{\text{s}^3}(t + t_0) = 30\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t_0, \text{ tehát a gyorsulásképlet: } a(t) = 30\text{m/s}^3 \cdot t.$$

Függőleges hajítás (Legyen most $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

.19) A lift egyenletesen emelkedik 2 m/s sebességgel. A benne tartózkodó ember leejt egy kulcsosomót, mely az ejtés pillanatában 1 m-re van a padlótól. Mikor koppanik a kulcs a padlón? Mennyi ideig esne, ha a lift állna? **(0,452 s)**

Ötlet1:

Ha a lift padlójának ejtési magasságában a talajhoz képest álló rendszerből nézzük a mozgásokat, akkor a hely-idő függvények felírhatóak. Mindkettőben szerepelni fog a lift kezdősebessége $s_1(t) = 1\text{m} + v_0 t - 1/2gt^2$ illetve: $s_2(t) = v_0 t$. Ezek különbsége adja a távolság időfüggését, ami 0 lesz a koppanáskor.

Ötlet2:

Ha a lift padlójához rögzítjük a koordináta-rendszert, akkor szabadesésről van szó 1 m magasságból. Ennek relatív gyorsulásuk szintén g , hiszen a lift a talajhoz képest nem gyorsul.

.20) Egy lift 14,7 m/s sebességgel süllyed. Abban a pillanatban, amikor mellettünk elhalad, a liftaknába ejtünk egy követ.

○ Mikor és hol lesz egyenlő a lift és a kő sebessége? **(1,50 s; 22,0 m; 11,0 m)**

○ Mikor és hol találkozik a kő a lifttel? **(3,00 s; 44,1 m)**

- A kő szabadeséssel éri el a lift sebességét.
- A hely-idő függvények egyenlők lesznek.

.21) Egy tárgyat függőlegesen felfelé, 12 m/s sebességgel, egy másikat ugyanakkor függőlegesen lefelé, 8 m/s sebességgel hajítunk el. Mennyi idő múlva lesznek egymástól 200 m-re? **(10 s)**

Ötlet1:

Az eldobás helyéhez rögzített koordináta-rendszerben a hely-idő függvények egyenlővé válnak.

A „g” kiesik az egyenletből!!

Ötlet2:

Az elhajítások pillanatában ejtsük el a koordinátarendszert is!

E rendszerben mindkét mozgás egyenletes, relatív sebességük állandó,

.22) Egy követ 50 m/s sebességgel függőlegesen felfelé hajítunk 10 magasról. Hol van a kő 7 s múlva, mekkora utat tesz meg ezalatt és mekkora a sebessége? **(120 m,; 135 m; -18,7 m/s)**

A hely-idő és a sebességekbe helyettesítünk.

út: Mivel a sebesség már negatív, a hajítás visszatérő ágban van. Ki kell számolni a tetőpont magasságát (amikor a sebesség 0-vá válik). Az út a tetőpontig, és onnan a jelenlegi helykoordinátáig tart.

.23) Ablakból kavicsot ejtünk, majd 1 s múlva egy másikat lefelé dobunk 20 m/s sebességgel. A két kő egyszerre éri el a talajt. Milyen magasról indítottuk a köveket? **(10,76 m)**

Az eldobás helyéhez rögzített koordináta-rendszerben a hely-idő függvények egyenlővé válnak: $s_1(t)=1/2gt^2$, illetve $s_2(t)=v_0(t-1s)+1/2g(t-1s)^2$.

.24) Két követ függőlegesen felfelé dobunk ugyanabból a pontból 3 s időközesssel, 50 m/s és 40 m/s-os sebességekkel. Mikor és hol találkoznak? Eséskor vagy emelkedéskor találkoznak? **(8,45 s; 72,34 m)**

Kevesebb ötlet, több matek:

Az eldobás helyéhez rögzített koordináta-rendszerben a hely-idő függvények egyenlővé válnak: $s_1(t)=v_{01}t-1/2gt^2$, illetve $s_2(t)=v_{02}(t-3s)+1/2g(t-3s)^2$.

A sebességek előjele mutatja meg, hogy felszálló vagy leszálló ágban van a találkozás.

Több ötlet, kevesebb matek:

A második test eldobásakor az első test már 105,9 m magasan, 20,57 m/s sebességgel halad felfelé.

Ekkor ejtsük el a koordináta-rendszert! Ebben a két mozgás egyenletes lesz, és a távolságukat az állandó 19,43 m/s-os relatív sebességükkel további 5,45 s alatt fogyasztják el.

Ekkor $v_{02} \cdot 5,45$ s-mal vannak az szabadon eső koordináta rendszer origója fölött.

Az első k.-rendszerhez képesti sebességek előjele mutatja meg, hogy felszálló vagy leszálló ágban van a találkozás.

.25) Kútba ejtett kő csobbanását 7,70 s múlva halljuk. A hang sebessége 340 m/s. Milyen mély a kút? **(240 m)**

Három egyenlet alkot egy egyenletrendszer: $h=1/2 gt_1^2$, $h= ct_2$, és $t_1+t_2=7,7s$. , melyet t_1 , t_2 , h ismeretlenekre kell megoldani. (A teljes négyzetté kiegészítéssel kikerülhet a másodfokú egyenlet megoldóképlete.)

.26) 100 m/s sebességgel függőlegesen fellőtt robbanó lövedék robbanásának hangját a fellövéstől számított 3,69 s múlva halljuk. Milyen magasan robbant a lövedék? A hangsebesség 320 m/s. **(249 m)**

Három egyenlet alkot egy egyenletrendszer: $h=v_{01}t_1-1/2 gt_1^2$, $h= ct_2$, és $t_1+t_2=3,69s$. , melyet t_1 , t_2 , h ismeretlenekre kell megoldani. (A teljes négyzetté kiegészítéssel kikerülhet a másodfokú egyenlet megoldóképlete.)

.27)

- Függőlegesen felfelé hajított tárgynak 303,4 m magasan 21,14 m/s sebessége van. Mennyi az idő és a kezdősebesség? **(6,00 s, 80,0 m/s)**
- Határozzuk meg a v_0 kezdősebességgel függőlegesen feldobott tárgy sebességét h magasságban. ($v^2 = v_0^2 - 2gh$)

Ötlet1: Két egyenlet alkot egy egyenletrendszer: $h = v_0 t - 1/2 g t^2$ és $v = v_0 - g t$, melyet t -re és v_0 -ra kell megoldani. Bár a sebesség lehet + vagy - 21,14 m/s is, ennek előjelétől nem fog függni a magasság!

Ötlet2: Használjuk fel a gyorsuló mozgásnál megismert, általánosan használható összefüggést a kezdő és végsebesség, illetve az elmozdulás között: $\left(s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}\right)$, ahol most $a = -g$.

.28) Egy 7,50 m hosszú zsineg egyik végére, és ettől a végétől 3,00 m-re egy-egy követ erősítünk. A zsineg másik végét megfogva, majd elengedve, a köveket egy hídról a folyóba ejtjük (a fonalat elengedő kezünk a híd „padló”jával van egymagasságban). A két csobbanás között 0,150 s időt mérünk. A közegellenállástól eltekintünk. Milyen magasan van a híd a víz felett? **(26,4 m)**

Ötlet1: Ha h jelöli az alsó test és a víz távolságát kezdetben, t pedig az alsó test esési idejét, akkor két egyenletből egyenletrendszer adódik: $h = 1/2 g t^2$ és $h + 3m = 1/2 g (t + 0,15s)^2$.

Ötlet2: Ha v jelöli az alsó test becsapódáskori sebességét, akkor a felső test egyenletesen gyorsulva, v és $v + g \Delta t$ kezdeti és végsebesség mellett, $\Delta t = 0,15$ s alatt tesz meg 3 métert. A középsebesség elmozdulásképletből adódik a v értéke. Ebből számolható az alsó test esésének magassága.

.29) A 120 m magasról eső test útját osszuk fel három olyan szakaszra, melyeket a test azonos idők alatt tesz meg. **(13,33 m, 40,00 m, 66,67 m)**

Ha a kezdettől indított, $t/3$, $2t/3$, t ideig tartó mozgásokat tekintjük, akkor ezek időtartamainak aránya 1:2:3, ezért a kezdettől megtett útjaik aránya $s \sim t^2$ miatt: 1:4:9, amiből az egyes szakaszok aránya: 1: (4-1) : (9-4) = 1:3:5.

.30)

○ Bizonyítsuk be Galilei 1683-ban megfogalmazott állítását: „A nyugalmi helyzetből induló szabadon eső test által egyenlő időközök alatt megtett távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok 1-től kezdődően.” (A fenti állítás bármely egyenletesen gyorsuló mozgásra is igaz.)

○ A nyugalmi helyzetből induló, egyenletesen gyorsuló test esetén hogyan aránylanak egymáshoz azok az időtartamok, amelyek az egyenlő utak megtételéhez szükségesek? **(1: 0,318 : 0,268 : 0,236 : 0,213)**

○ Ha a kezdettől indított mozgásokat tekintjük, akkor ezek időtartamainak aránya 1:2:3, ezért a kezdettől megtett útjaik aránya $s \sim t^2$ miatt: 1:4:9.

Ezért az egyes szakaszok aránya a szomszédos négyzetszámok közötti különbségek arányával egyenlő: 1: (4-1): (9-4) : ... : $[n^2 - (n-1)^2]$: ... = 1:3:5: ... : (2n-1): ...

○ Hasonlóan, a kezdettől induló, az egyes szakaszok végéig tekintett mozgások útjainak aránya 1:2:3: ..., ezért a hozzájuk szükséges idők aránya: $\sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \dots$

Így az egyes szakaszokon eltöltött idők aránya: $(\sqrt{2} - \sqrt{1}) : (\sqrt{3} - \sqrt{2}) : (\sqrt{4} - \sqrt{3}) : \dots : (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) : \dots$

.31) Léggömb állandó 4 m/s sebességgel süllyed, amikor kiejtenek egy bombát. Ettől a pillanattól kezdve a léggömb 12 m/s sebességgel emelkedik. A bomba földetéréskor felrobban, ennek hangját az elejtéstől számítva 6,90 s múlva hallják. A hang terjedési sebessége 320 m/s. Milyen magasságban voltak a kiejtéskor? **(203 m)**

Jelölje t a kiejtéstől a bomba földet éréséig eltelt időt. A földetérés pillanatában a távolságuk ezzel felírható. A második szakaszban ezt a távolság csökken le a hang és a léggömb közötti relatív sebességgel, miközben (6,9s - t) idő telik el. Az egyenlet másodfokú lesz.

Vízszintes hajítás (Legyen most $g=9,81 \text{ m/s}^2$)

.32) 12,8 m magasságból 5 m/s sebességgel vízszintesen testet hajítunk el. Az elhajítás helyétől mekkora vízszintes távolságra, mekkora sebességgel és a talajhoz viszonyítva mekkora szög alatt csapódik a test a földre? **(8,08 m, 16,6 m/s, 72,5°)**

A magasságból az esési időt, ebből pedig a becsapódáskori függőleges sebességkomponenst kapjuk.
A két sebességkomponens vektorként adódik össze.

.33) 1 m magasról mekkora kezdősebességgel kell vízszintesen elhajítani egy tárgyat, hogy az 8 m/s sebességgel érjen földet? **(6,66 m/s)**

A magasságból az esési időt, ebből pedig a becsapódáskori függőleges sebességkomponenst kapjuk.
Ebből adódik a vízszintes sebességkomponens.

.34) A 200 m magasan 180 km/h sebességgel haladó repülőgépről a cél előtt milyen magasságban kell kiejteni a segélycsomagot, ahhoz, hogy célba érhesse? Mekkora lesz sebessége a földetéréskor? A közegellenállástól tekintsünk el! **(319 m, 80,2 m/s)**

A magasságból adódik az esési időt.
Ebből pedig egyrészt a becsapódáskori függőleges sebességkomponens, másrészt a vízszintes elmozdulás kapható.

.35) Vezessük le a vízszintes hajítás pályájának egyenletét, azaz határozzuk meg a h magasságú, v_0 kezdősebességű hajítás pályáján lévő pontok x és y koordinátáinak összefüggését! A koordináta rendszer legyen a talajon, a függőleges tengely mutasson felfelé. Milyen görbe a pálya alakja? $\left(y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + h\right)$ **(parabola)**

Az időtől függő helykoordináta-képleteket felírjuk: $x(t)=v_0t$ illetve $y(t)=h-1/2gt^2$, majd kiejtjük a t időt.

.36) Adva van egy 3 m magas függőleges karó. Honnan és milyen magasról kell indítani a 9,8 m/s sebességű vízszintes hajítást, hogy az elhajított test a karó tetejét érintve, a karó aljától 4 m távolságra essen a földre? **($x=5,36 \text{ m}$ a karótól, $h=4,46 \text{ m}$ magasról)**

Ötlet1:
Használjuk a pálya egyenletét! A koordináta rendszer origója a talajon, a hajítás helye alatt.
A karó teteje és a talajra esés helye rajta van a pályán.

Ötlet2:
Az adott kezdősebesség és a vízszintesen megtett 4 m megadja, mennyi Δt idő telik el a karó érintése és a talajra esés között.
A teljes esés utolsó Δt időtartamában 3 métert tesz meg: $3m = 1/2gt^2 - 1/2g(t-\Delta t)^2$. Ebből adódik a teljes esési idő.

.37) Adva van egy 73,5 m magas, és tőle 40 m távolságra egy 34,3 m magas függőleges karó. Honnan, milyen magasról és mekkora kezdősebességgel kell indítani a vízszintes hajítást, hogy az elhajított test a két karó tetejét érintve, a második karó aljától 20 m távolságra essen a földre? **($x=20,0 \text{ m}$ az első karótól, $h=78,4 \text{ m}$, $v=20,0 \text{ m/s}$)**

Ötlet1:
A koordináta rendszer az elhajítás helye alá, a talajra helyezve, használjuk a pálya egyenletét!
A karók teteje és a talajra esés helye rajta van a pályán.
Egyik egyenletet a másik kettőből kivonva, a kapott egyenleteket osszuk el egymással.

Ötlet2:
A mozgás 2. és 3. szakaszában vízszintesen megtett 40 m és 20 m távolságok aránya adja az itt eltöltött idők arányát. Legyen a harmadik szakasz ideje t , a földre érkezéskor a függőleges sebességkomponens v . Ekkor a második karó tetején $v-gt$, az első karó tetejénél $v-3gt$ a sebesség függőlegesen.

Felírva a középssebességes elmozdulás-képletet a 2. és 3. szakasz függőleges mozgására, egyenletrendszer adódik v -re és t -re.

Célszerű egymással elosztani őket.

Ferde hajítás (Legyen most $g=9,81 \text{ m/s}^2$)

.38) Egy testet 25 m/s sebességgel, 60 fokos szögben ferdén elhajítunk.

- Mennyi az emelkedési és a repülési idő? (**2,207 s; 4,414 s**)
- Hol van a pálya tetőpontja? (**23,89 m; 27,59 m**)
- Hol esik le? (**55,18 m**)
- Mekkora sebességgel és mekkora szögben csapódik a talajba? (**25,00 m/s, 60,00°**)

A koordináta rendszer origója az elhajítás helyén, y tengely felfelé.

Bontsuk fel a kezdősebességet: $v_{ox} = v_o \cos \alpha$, $v_{oy} = v_o \sin \alpha$.

Vízszintes irányba egyenletes mozgás, függőleges irányba hajítás zajlik:

$$v_x(t) = v_o \cos \alpha = \text{állandó}, \quad v_y(t) = v_o \sin \alpha - gt \quad x(t) = v_o \cos \alpha \cdot t \quad y(t) = v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Akkor van a tetőpont, amikor a függőleges sebesség 0, így az emelkedési idő: $t_{em} = v_o \sin \alpha / g$. A repülési idő ennek duplája.

A sebesség minden pillanatban a két merőleges komponens összege.

.39) A gravitációs gyorsulás értéke a Holdon a földi érték hatoda. Hányszor magasabbra és hányszor messzebbre száll az azonos sebességgel és azonos szögben elhajított test a Holdon mint a Földön? Hányszor annyi ideig repül? (**hatszor**)

Az emelkedési idő határozza meg az összes választ.

.40) Milyen távolságot ér el a súlylökő, ha a golyót a talajszint fölött $2,3 \text{ m}$ magasságból, 45 fokos szög alatt, 14 m/s kezdősebességgel löki el? (**22,06 m**)

Addig repül, amíg függőleges elmozdulása $-2,3 \text{ m}$ nem lesz. A másodfokú egyenletből (teljes négyzetté alakítással vagy a megoldóképlettel) a repülési idő adódik.

Ezalatt vízszintesen egyenletesen halad.

.41) *Vezessük le a ferde hajítás pályájának egyenletét, azaz határozzuk meg az α szögű, v_o kezdősebességű ferde hajítás pályáján lévő pontok x és y koordinátáinak összefüggését! Milyen görbe a pálya alakja? (**parabola: $y = h_o + (tg \alpha) \cdot x - g/(2v_o^2 \cos^2 \alpha) \cdot x^2$**)

Az $x(t) = v_o \cos \alpha \cdot t$ összefüggésből a t időt kifejezzük és az $y(t) = h_o + v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ összefüggésbe helyettesítjük:

.42) *Milyen sebesség szükséges a 18 m -es távolság eléréséhez, ha a súlylökő a golyót a talajszint fölött 2 m magasságból, 45 fokos szög alatt, löki el? (**12,61 m/s**)

Ötlet1:

A kezdősebességet v_o -lal jelölve, az emelkedési idő és az emelkedési magasság könnyen kifejezhető vele. Innen szabadesést elképzelve, az esési magasságból az esési idő fejezhető ki v_o -lal.

A két idő összege alatt vízszintesen 18 m -t halad. Ez adja az egyenletet v_o -ra.

Az egyenlet ijesztőnek tűnő, gyökös egyenlet lesz. A gyökös tagot egyedül hagyva egyik oldalon, emeljünk

négyzetre. Szép eredmény adódik: $v_o = x_o \sqrt{\frac{g}{x_o + h_o}}$

Ötlet2:

Mivel az időbeli lefolyás most nem fontos, keressünk kapcsolatot a mozgás közben elfoglalt térbeli pontok x és y koordinátái között (pálya egyenlete):

Az $x(t) = v_o \cos \alpha \cdot t$ összefüggésből a t időt kifejezzük és az $y(t) = h_o + v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ összefüggésbe helyettesítjük: $y = h_o + (tg \alpha) \cdot x - g/(2v_o^2 \cos^2 \alpha) \cdot x^2$.

Ennek illeszkednie kell az $x=18 \text{ m}$, $y=0 \text{ m}$ koordinátájú pontra. Az egyenletből v_o adódik.

.43) 30 fokos szögű ferde hajítás távolsága 100 m. Mekkora a kezdősebesség és az emelkedés magassága?
(33,66 m/s, 14,43 m)

Ötlet1:

Az emelkedési idő a v_o kezdősebességtől $t_{em} = v_o \sin \alpha / g$ módon függ. A távolság pedig $x_{max} = v_o \cos \alpha * 2t_{em}$. Ebből adódik v_o .

Az maximális magasság $h_{max} = 1/2 g t_{em}^2$ (a második szakaszban az esési idő ugyanennyi, és szabadesés történik).

Ötlet2:

Használjuk a pálya-egyenletet: $x = 100$ m, $y = 0$ m.

.44) 60 fokos szögű ferde hajítás emelkedés magassága 50 m. Mekkora a kezdősebesség és a hajítás távolsága?
(36,17 m/s; 115,47 m)

A $h_{max} = 1/2 g t_{em}^2$ -ből az emelkedési idő, abból pedig a kezdősebesség függőleges komponense adódik.
Az ismert szög miatt a vízszintes sebességkomponens is számolható.

.45) Milyen szögben kell elhajítani egy testet, hogy ugyanolyan magasra emelkedjék, mint amilyen távol leesik?
(75,96°)

A feltétel szerint $v_o \cos \alpha * 2t_{em} = 1/2 g t_{em}^2$. Ezen kívül $t_{em} = v_o \sin \alpha / g$. Az utóbbit az előbbibe helyettesítve, α adódik.

.46) 25 m/s kezdősebességgel a lehető legmesszebb szeretnénk dobni. Mekkora legyen a hajítás szöge? Mekkora lesz ez a távolság? (45°; 63,71 m)

$x_{max} = v_o \cos \alpha * 2t_{em} = 1/2 g t_{em}^2$. Ezen kívül $t_{em} = v_o \sin \alpha / g$. Az utóbbit az előbbibe helyettesítve, α -nak trigonometrikus függvénye adódik.

A maximum keresésekor használhatjuk az ismert $2 \sin \alpha * \cos \alpha = \sin 2\alpha$ azonosságot, ...

....avagy a hegyesszögek derékszögű háromszögben definiált szögfüggvényeit: $2 \sin \alpha * \cos \alpha = 2 * a/c * b/c = 2ab/c^2 = 2cm/c^2 = 2m/c$. (a derékszögű háromszög oldalai, területe és átfogóhoz tartozó magasságai: a, b, c, t, m . Thalesz-tétel)

A $\sin 2\alpha$ avagy a $2m/c$ maximumai könnyen láthatóak.

.47) 25 m/s kezdősebességgel 40 m távolra szeretnénk dobni. Mekkora legyen a hajítás szöge? (19,45°; 70,55°)

Ötlet1:

$x_{max} = v_o \cos \alpha * 2t_{em}$, ahol $t_{em} = v_o \sin \alpha / g$. Az utóbbit az előbbibe helyettesítve, α -nak trigonometrikus függvénye adódik, mely tartalmazza $2 \sin \alpha * \cos \alpha$ -et is.

[Használhatjuk az ismert $2 \sin \alpha * \cos \alpha = \sin 2\alpha$ azonosságot, ...

....avagy a hegyesszögek derékszögű háromszögben definiált szögfüggvényeit: $2 \sin \alpha * \cos \alpha = 2 * a/c * b/c = 2ab/c^2 = 2ab/(a^2 + b^2)$. Ez utóbbi értéke adódik az adatokból, így $(a/b + b/a)$ értéke számolható. Új ismeretlent vezessünk be a/b -re, amire az egyenlet másodfokú, értéke pedig $\tan \alpha$.]

Ötlet2:

Használjuk a pálya egyenletét! $0,3139 = \sin \alpha * \cos \alpha$ adódik. Megoldását ld. fent.

.48) 80 m/s kezdősebességgel elhajított test 40 m magasra emelkedett. Mekkora volt a hajítás szöge és távolsága? (20,50°; 427,98 m)

A magasságból az emelkedési idő, abból pedig a függőleges kezdősebesség adódik.

Ezután a vízszintes kezdősebesség, majd a hajítás távolsága számolható.

.49) Hogyan kell egy testet elhajítani, hogy 5 s múlva 50 m távolságban essen le? ($v * \cos \alpha = 10$ m/s)

Vízszintesen a mozgás egyenletes.

.50) Milyen magasra lehet lőni azzal a puskával, mellyel vízszintes terepen legfeljebb 1000 m távolságra lőhetünk? **(500 m)**

Ferde hajításkor a maximális távolság (45° -os szög esetén adódik): v_0^2/g , míg függőleges hajításkor $v_0^2/(2g)$.

.51) *30 fokos szög alatt hajítva el kell találni egy célpontot, mely 40 m vízszintes távolságban és 15 m magasságban van. Mekkora legyen a kezdősebesség? **(35,96 m/s)**

Használjuk a pálya-egyenletet : $15m = (tg\alpha)*(40m) - g/(2v_0^2\cos^2\alpha)*(40m)^2$ és $\alpha = 30^\circ$.

.52) *25 m/s-os kezdősebességgel el kell találni egy célpontot, mely 40 m vízszintes távolságban és 15 m magasságban van. Mekkora legyen a hajítás szöge? **(65,34°; 45,22°)**

Használjuk a pálya-egyenletet : $15m = (tg\alpha)*(40m) - g/(2v_0^2\cos^2\alpha)*(40m)^2$ és $\alpha = 25 m/s$.

Használni kell a megoldáshoz az $1/\cos^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$ összefüggést is.

.53) *El kell találni egy célpontot, mely 40 m vízszintes távolságban és 15 m magasságban van. Úgy szeretnénk eltalálni, hogy a test a pálya tetején találja el a célt. Mekkora legyen a kezdősebesség és a szög? **(36,87°; 28,59 m/s)**

A pálya tetejének koordinátáinak függése a kezdőfeltételektől: $x^{tető} = v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha / (2g)$, és $y^{tető} = v_0^2 \sin^2\alpha / (2g)$. Ezek egyenletrendszeréből α és v_0 adódik. Először célszerű elosztani őket egymással.

.54) 25 m/s-os kezdősebességgel, 60 fokos szög alatt fellőtt lövedék pályájának tetőpontján két darabra robban szét. A nagyobbat a robbanás függőlegesen felfelé dobja 4 m/s, a kisebbet függőlegesen lefelé, 8 m/s sebességgel, miközben a vízszintes sebességeik nem változnak. Mikor és hol ér földet a két lövedék? **(a fellövéstől számítva: kisebb: 3,744 s, 46,80 m-re; nagyobb: 4,859 s, 60,74 m)**

A robbanás $t_1 = 2,062$ s múlva, 23,89 m magasan történik. Innentől két újabb ferde hajítás indul, ebből a magasságból.

.55) 60 fokos szög alatt, különböző kezdősebességek esetén indított hajítások tetőpontjainak mi a mértani helye? **(egyenes az origón át: $y = x/2tg\alpha$)**

$x^{tető} = v_{ox} * t_{em}$ és $y^{tető} = v_{oy}/2 * t_{em}$ Oszttással ejtsük ki a kezdősebességet!

.56) ***[V] Egy 20° hajlásszögű lejtőn felfelé hajítunk egy testet 25 m/s kezdősebességgel. Mekkora szög esetén lesz maximális a lejtőn mért hajítási távolság? **(55°)**

A lejtőre esés helyének (x;y) koordinátája egyfelől a lejtőn van, másfelől a hajítás pályáján.

A lejtő miatt $y = tg20^\circ$ összefüggést a pálya egyenletébe helyettesítjük.

Az átalakítások során használni kell a $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, a $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ és a $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$ összefüggéseket.

Az adódik, hogy a hajítás irányát a függőleges és a lejtő lapjának szögfelezője adja meg!

.57) Egy vadász puskájának csövét éppen egy faágon ülő macskára irányította (a puska csövének egyenese átmegy a macskán). A lövés pillanatában, amikor a lövedék elhagyja a csövet, a macska alatt letörik az ág és szabadeséssel esik lefelé. Eltalálja-e a vadász a macskát? **(sajnos)**

Ötlet1: A mozgást nem csak derékszögű, hanem ferdeszögű koordináta-rendszerből is vizsgálhatjuk. Az x tengely legyen a cső iránya, az y tengely pedig függőleges.

Ebben a rendszerben a golyó egyidejűleg egyenletes mozgást végez x irányba, miközben szabadon esik y irányba. A macska szabadon esik y irányba.

Ötlet2: Ha a koordináta rendszert a lövés pillanatában elejtjük (hagyjuk szabadon esni), akkor ebben a golyó a macskán átmenő egyenes mentén egyenletes mozgást végez, miközben a macska áll.

Lejtő (Legyen most $g=9,81 \text{ m/s}^2$)

.58) Egy 30 fokos hajlásszögű, súrlódásmentes lejtőn felfelé indítunk egy 8 m/s sebességű testet. Mikor és mekkora út megtétele után érkezik vissza? **(3,262 s, 13,15 m)**

A lejtőn a gyorsulásvektor lefelé mutat és $g \sin \alpha$ nagyságú.
A sebesség 8m/s-ról -8m/s-ra változik.

.59) Tekintsük a Budapest-Baja távolságot egy súrlódásmentes lejtőnek. Mekkora sebességgel és mennyi idő alatt jönne le rajta egy test, ha a két város tengerszint feletti magasságának különbsége 10 m, és a két város távolsága 180 km? **(50,4 km/h, 7,14 h)**

Előbb a lejtő szöge, abból a gyorsulás számolható.

.60) Egy 3 m hosszú lejtőn 2 m/s lett a végsebesség. Mekkora a hajlásszöge és magassága? **(3,90°, 0,204 m)**

Egyenletesen gyorsuló mozgás, gyorsulása számolható.
Ebből pedig a hajlásszög.

.61) *Egy pontból kiinduló, különböző hajlásszögű lejtőkön egyszerre indítunk el testeket. Mi azon pontok mértani helye, ahol...

a) ... a tárgyak sebessége azonos? **(vízszintes egyenes)**

b) ... a tárgyak az indítás után egy kiválasztott pillanatban tartózkodnak? **(a szabadesés útja, mint átmérő fölé rajtot félkör)**

a) Legyen a lejtőn s út után a sebesség v . Ekkor $v=at$, és $s=1/2at^2$ miatt $v^2=2as$. Ámde $a=g \sin \alpha$, így a test mélysége az elengedés helyétől számítva: $h=s \sin \alpha = v^2/(2g) =$ állandó. Ez éppen a szabadon eső test mélysége.

b) Ötlet1:

A test útja a lejtőn: $l(\alpha)=1/2at^2=1/2g \sin \alpha \cdot t^2=1/2gt^2 \sin \alpha$, tehát a szabadon eső test útjának $\sin \alpha$ - szorosa. Rajzoljuk meg az O pontból induló lejtőn mozgó T test és az ugyanonnan induló szabadon eső M test pályáit, és állítsunk merőlegest M pontból a lejtőre, ennek talppontja legyen T' . $OM=1/2gt^2$, $OT=1/2gt^2 \sin \alpha$.

De az OMT szög a lejtő szögével egyenlő, merőleges szárú hegyesszögek. Így OMT' háromszögből $OT'=OM \sin \alpha$. így $OT=OT'$, azaz T éppen a derékszög csúcsa. Így Thalesz tételének megfordítása szerint az OM fölé írt Thalesz körön van. Nyilván e kör minden pontja megkapható egy-egy test helyeként alkalmasan választott α esetén.

Ahogy az idő telik, e Thalesz-kör egyre nagyobb lesz, legalsó pontját a szabadon eső test jelöli ki.

Ötlet2:

A test gyorsulása $a=g \sin \alpha$, útja $l=1/2at^2$, vízszintes elmozdulása $x=l \cos \alpha=1/2gt^2 \sin \alpha \cos \alpha=1/4gt^2 \sin 2\alpha$, függőleges elmozdulása: $y=l \sin \alpha=1/2gt^2 \sin^2 \alpha=1/4gt^2(1-\cos 2\alpha)$.

Kiejtve a szöget, x és y között olyan másodfokú egyenlet adódik, ami kör egyenlete. Ebből a sugara és a középpontja leolvasható.

.62) *Adott egy ferde sík és felette egy pont. Merre vezet az a lejtő, melyiken a pontból a ferde síkra a legrövidebb idő alatt lehet lecsúszni? (oda vezet, ahol az a kör érinti a síkot, amelynek az adott pont a legmagasabb pontja.)

Ötlet1:

Az előző feladat tanulsága, hogy adott időpontban a lehetséges lejtőkön tartózkodó testek kört alkotnak, melynek sugara az időnek szigorúan monoton növvő függvénye.

Azt a pillanatot keressük, amikor ez a kör éppen eléri (érinti) a lejtőt.

A lejtőre merőleges körsugár a függőlegeshez α szög alatt hajlik, ezért a lejtő (a derékszögű háromszögben lévő két egyenlőszárú háromszög miatt) $\alpha/2$ szög alatt hajlik a függőlegeshez.

Ötlet2:

Jelölje az eredeti lejtő szögét a vízszintessel α , a keresett legrövidebb idejű lejtőnek a függőlegessel bezárt szögét ϕ , és legyen a pont d távolságra a lejtő lapjától.

Ekkor a lejtő hossza $l=d/(\cos(\alpha-\phi))$, a gyorsulás rajta $a= g\cos\phi$. Az idő négyzete $l=1/2at^2$ -ből: $t^2 = \frac{2d}{g\cos\phi\cos(\alpha-\phi)}$.

Ez akkor minimális, ha $\cos\phi*\cos(\alpha-\phi)$ maximális. Ez átalakítható: $\frac{\cos[\varphi+(\alpha-\varphi)]+\cos[\varphi-(\alpha-\varphi)]}{2} = \frac{1}{2}\{\cos\alpha + \cos(2\varphi-\alpha)\}$. Ennek maximuma $\alpha= 2\varphi$ esetén van.